Sujet

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(2; 4; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3 \\ y & = & 3+t \\ z & = & 3+t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$.

   b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M′ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM′ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

   c. On rappelle que M′ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
   Justifier que M′ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
   En déduire que les coordonnées du point M′ sont (3; 1; 1).

4. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. Justifier que le point M a pour coordonnées (1; 2; 0).

   c. Calculer la distance MM′.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 5t \\ y & = & 2+5t \\ z & = & 1+t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

   b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
   Exprimer le volume du tétraèdre ANMM′ en fonction de ℓ.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

   c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.